

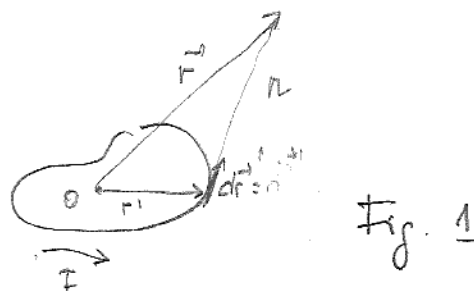
Aula 22

Magnetização

A expansão em multipolos do potencial vetor

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{d\vec{\ell}'}{r} \quad (1)$$

$$\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}'$$



$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r} \left[1 + \frac{r'}{r} \cos \theta + \frac{1}{2} \frac{r'^2}{r^2} (3 \cos^2 \theta - 1) \right] \quad (2)$$

(ver aula "Campos Elétricos da matéria")
Substituindo Eq. (2) em (1)

$$\vec{A}(\vec{r}) = \underbrace{\frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{1}{r} \oint d\vec{\ell}'}_{\text{monopolo}} + \underbrace{\frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{1}{r^2} \oint r' \cos \theta d\vec{\ell}'}_{\text{dipolo}} + \underbrace{\frac{1}{r^3} \oint r'^2 \left(\frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right) d\vec{\ell}'}_{\text{quadrupolo}} \quad (3)$$

Como

$$\oint d\vec{\ell} = 0 \quad (4)$$

que expressa a inexistência de monopolo ou

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

O termo dominante para a ser o termo de dipolo

$$\vec{A}_{\text{dip}}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \oint r' \sin\theta \, d\vec{\ell}' = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \oint (\hat{r} \cdot \vec{r}') \, d\vec{\ell}' \quad (5)$$

Teorema de Stokes

$$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \cdot d\vec{a} = \oint_P \vec{v} \cdot d\vec{\ell}$$

$$\text{se } \vec{v} = \vec{c}T$$

$$\oint \vec{\nabla} \times (T\vec{c}) \cdot d\vec{a} = \oint \vec{c} T(x,y,z) \cdot d\vec{\ell}$$

lembrando que

$$\vec{\nabla} \times (f \vec{A}) = f (\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \vec{A} \times \nabla f$$

então

$$\oint \vec{\nabla} \times (T \vec{c}) \cdot d\vec{a} = \oint T (\vec{\nabla} \times \vec{c}) \cdot d\vec{a} - \oint \vec{c} \times \nabla T \cdot d\vec{a}$$

$$\text{Agora } \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$$

(propriedade do produto triplo

então

$$\oint \vec{\nabla} \times (T \vec{c}) \cdot d\vec{a} = - \vec{c} \cdot \oint \vec{\nabla} T \times d\vec{a}$$

e final

$$- \vec{c} \cdot \oint \vec{\nabla} T \times d\vec{a} = \vec{c} \cdot \int T d\vec{\ell}$$

$$\boxed{\oint_S \vec{\nabla} T \times d\vec{a} = - \int_{\gamma} T d\vec{\ell}}$$

fazendo $T = \vec{c} \cdot \vec{r}$

$$\oint_S \vec{\nabla}(\vec{c} \cdot \vec{r}) \cdot d\vec{a} = - \vec{c} \cdot \int \vec{r} \cdot d\vec{\ell}$$

Como

$$\vec{\nabla}(\vec{c} \cdot \vec{r}) = \vec{c} \times (\vec{\nabla} \times \vec{r}) + \vec{r} \times (\vec{\nabla} \times \vec{c}) - (\vec{c} \cdot \vec{\nabla}) \vec{r} + (\vec{r} \cdot \vec{\nabla}) \vec{c}$$

Como

$$\oint (\hat{r} \cdot \vec{r}') \cdot d\vec{\ell}' = -\hat{r} \times \int d\vec{a}' \quad (6)$$

$$\vec{A}_{\text{dip}}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \hat{r} \times \int d\vec{a}' \quad (7)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \hat{r}}{r^2} \quad (8)$$

onde o momento de dipolo magnético $\vec{m}$
é definido como

$$\vec{m} = I \int d\vec{a}' = I \vec{a}' \quad (9)$$

2. Torques e forças sobre Dipolos Magnéticos

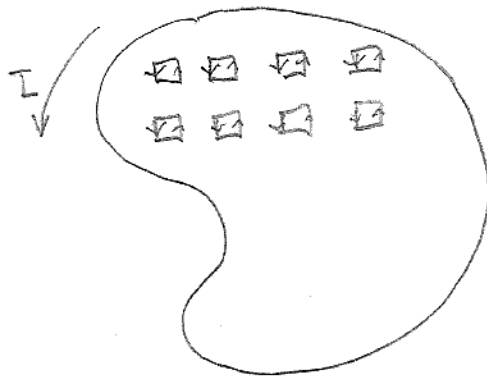


Fig. 2

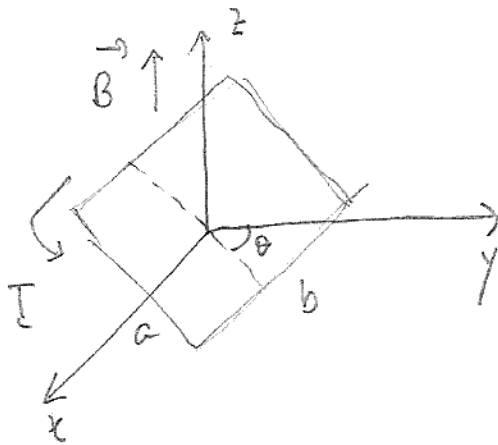
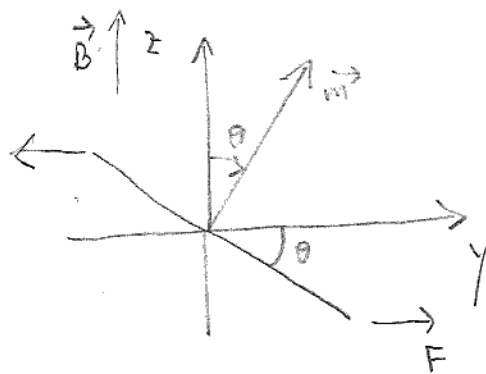


Fig. 3



$$\vec{F} = i \vec{l} \times \vec{B}$$

1) torque

$$\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\vec{N} = 2 F_{\text{mag}} \cdot \left(\frac{a}{2} \right) \sin \theta \hat{x}$$

$$\vec{N} = F_{\text{mag}} a \sin \theta \hat{x}$$

$$\vec{N} = I b B \sin \theta \hat{x}$$

$$\vec{N} = m B \sin \theta \hat{x}$$

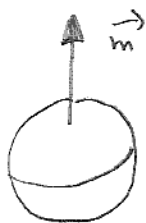
w

$$\boxed{\vec{N} = \vec{m} \times \vec{B}} \quad (10)$$

A equação (10) é idêntica ao
caso elétrico $\vec{N} = \vec{p} \times \vec{E}$. Em particular,

o torque que aparece tende a alinhar o
momento de dipolo com o campo magnético.

Desde que cada elétron constitui um momento de
dipolo magnético



Esse seria o mecanismo fundamental do
para magnetismo. Cuidado! Só mecânica

quântica pode realmente explicar esse
fenômeno!